

织法公式：定义与定理

The Weaving Formula: Definition and Theorems

刘心旷，姬雅

摘要

太一演化宇宙论主张：太一是宇宙的本源，化生阴阳二象。无数对阴阳相互交织，结成一张网：我们称每对纠缠为一个「结」，结与结的联结方式为「织法」。织法决定物理规律——引力、时空、物质，皆为网络的涌现。本文将该主张数学化：给出**织法**（Weave）的严格定义——一个携带群荷的网络 $W = (V, E, T)$ ；给出**织法公式**——定义该网络量子态 $|\Psi[W]\rangle$ 的方程；列出公式成立的假设输入（G1-G4，其中 $G = \mathbb{Z}_2^3$ 为唯一结构性假设）；并证明织法公式直接推出的基本定理：**面积律定理**（Turaev-Viro (TV) 态二分纠缠熵 $S = (L-1) \cdot \ln D$ ，即 $f = L-1$ ）、**区域固有性定理**（任意切割 $f = E_B - F_B = V_B - \text{co}(B)$ ）、**热力学极限饱和定理**（ $c_\infty = 1$ ）与**质量间隙普适律**（ $m^* = -\ln(|G|-2)/(|G|-1)$ ， $|G| \geq 3$ ，只依赖群大小，与群类型无关）。全部定理附完整证明与数值验证（18 个切割数据点、6 个群的 TRG 不动点谱，均精确匹配）。

关键词：织法公式；织法；群约束张量网络；面积律；纠缠熵；太一演化宇宙论

1. 引言：从太一到织法

太一演化宇宙论 [1] 主张：太一是宇宙的本源，化生阴阳二象。无数对阴阳相互交织，结成一张网：我们称每对纠缠为一个「结」，结与结的联结方式为「织法」。**织法决定物理规律**——引力、时空、物质，皆为网络的涌现。本文的任务，就是把「织法」从隐喻变成数学。

本文的结构：第 2 节定义织法；第 3 节给出织法公式；第 4 节列出假设输入；第 5 节证明基本定理（面积律、区域固有性、热力学极限饱和、质量间隙普适律）；第 6 节给出数值验证；第 7 节讨论织法公式的边界；第 8 节结论。

2. 织法的定义

定义 1 (织法 Weave)：织法是带荷的网络： $W = (V, E, T)$ —— V 为节点集， E 为边集， T 为节点张量族。每条边 $e \in E$ 携带一个荷 $a_e \in G$ （ G 为荷空间，有限群）。对顶点 $v \in V$ ，记其关联边集 $\partial v := \{e \in E : v \in e\}$ ，价数 $d_v := |\partial v|$ （三价即 $d_v \equiv 3$ ）， $G^{\wedge \partial v} := \{b : \partial v \rightarrow G\}$ 为 v 的关联边荷函数空间。节点张量 $T_v : G^{\wedge \partial v} \rightarrow \mathbb{C}$ 以 v 的关联边荷配置为输入，腿与关联边一一对应，不编号。

节点张量满足两个约束（对每个 $v \in V$ ）：

1. **荷守恒**： $T_v \neq 0$ 仅当 v 各关联边荷的群和为零， $\bigoplus_{e \in \partial v} a_e = 0$ ；

2. **归一化**： $\sum_{\{a_e\}_{e \in \partial v}} |T_v(\{a_e\}_{e \in \partial v})|^2 = 1$ 。

该定义对任意荷空间 G 与任意价数成立（各节点价数可不同），与具体群选择和价数选择无关。

3. 织法公式

定义 2（织法公式）：织法公式定义网络的量子态——遍及所有荷构型的叠加，振幅为节点张量之积。荷构型即边荷配置。全体边荷配置的集合为函数空间 $G^E := \{a : E \rightarrow G\}$ （ a 给每条边 $e \in E$ 赋一个荷 $a_e \in G$ ）； $|a\rangle$ 为配置 a 对应的量子基矢； $a|_{\partial v} \in G^{\partial v}$ 为配置 a 限制在 v 的关联边 ∂v 上的取值，即 T_v 的输入：

$$|\Psi[W]\rangle = \sum_{a \in G^E} \left(\prod_{v \in V} T_v(a|_{\partial v}) \right) |a\rangle$$

$$Z[W] = \langle \Psi[W] | \Psi[W] \rangle = \sum_{a \in G^E} \left| \prod_{v \in V} T_v(a|_{\partial v}) \right|^2$$

其中求和遍及所有边荷配置（荷守恒由 T_v 支集自动筛选）；乘积遍及所有节点 v 。 $Z[W]$ 为配分函数。该式对任意荷空间 G 与任意价数成立——织法公式是抽象的：腿由关联边标记、不编号，价数 $d_v = |\partial v|$ 藏在 T_v 的定义域维数里，具体群只是装入的参数。

与基态的关系：织法公式态 $|\Psi[W]\rangle$ 即弦网基态（TV 态）：合法构型由节点荷守恒（张量 δ 项）与面平坦约束共同筛选（约束的哈密顿量实现与数值确认见 § 5、§ 6； K_4 上 $|\Psi[W]\rangle$ 与基态重叠 1.00000000 精确）。

构造过程：给定织法数据 $W = (V, E, T)$ ——

1. 对每条边赋予荷 $a_e \in G$ ，得边荷配置 $a \in G^E$ ；
2. 荷守恒约束（节点各关联边荷 $\oplus$ 为零）筛选合法配置；
3. 每个合法配置的振幅 = 各节点张量之积 $\prod_{v \in V} T_v(a|_{\partial v})$ ；
4. 网络量子态 = 所有合法配置的叠加 $|\Psi[W]\rangle = \sum_{a \in G^E} \left(\prod_{v \in V} T_v(a|_{\partial v}) \right) |a\rangle$ ；
5. 配分函数 $Z[W] = \langle \Psi[W] | \Psi[W] \rangle =$ 振幅模方和。

4. 假设输入

织法公式是抽象的（定义 2：任意荷空间、任意价数）；具体化需要选择荷空间与价数，并在所选价数下给出节点张量的显式形式。本宇宙的假设输入：

- **（G1）荷空间：** $G = \mathbb{Z}_2^3$ （八元素有限阿贝尔群）。这是唯一的假设性输入；换用其他群公式形式不变，仅 $\ln D$ 值改变（多织法普适性扫描已验证）。
- **（G2）价数与节点张量形式：**价数 $n = 3$ （三价节点）。参数空间的一个点，非推导结果；四价等同样可行（数值已验证，张量形式相应换为四价）。三价设定下，节点张量取显式形式：

$$T^{(v)}_{abc} = \delta_{\{a \oplus b \oplus c, 0\}} \cdot t_{ab} \cdot \omega(a, b, c)$$

其中 δ 项为荷守恒约束（ T 非零仅当 $a \oplus b \oplus c = 0$ ）； t_{ab} 为节点振幅矩阵（归一化，见 G3）； ω 为相位数据（3-上闭链，见 G4）。

- **(G3) 节点振幅:** t_{ab} (三价节点张量的振幅矩阵, 依赖边荷 a, b ; 逐节点归一化 $\sum_{a,b} |t_{ab}|^2 = 1$, 见 § 2 约束 2)。本体 (TV 态 / 弦网基态) 取等权振幅 $t_{ab} \equiv 1/8$, 归一化自动满足。
- **(G4) 相位:** ω ——3-上闭链, 满足五边形方程, $\omega \in H^3(\mathbb{Z}_2^3, U(1)) \cong (\mathbb{Z}_2)^7$, 共 128 种独立选择。五边形方程即阿贝尔群的 3-上闭链条件 $\delta\omega = 1$ 的显式形式 (5 项恒等式, 对任意 $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2^3$):

$$\omega(b,c,d) \cdot \omega(a,b \oplus c,d) \cdot \omega(a,b,c \oplus d) = \omega(a \oplus b,c,d) \cdot \omega(a,b,c)$$

将假设输入 G1-G4 全部代入定义 2, 本文的织法公式取如下完整形式。三价设定下每个节点 v 只有三条关联边, 对其固定编号 $\partial v = \{e_{\{v,1\}}, e_{\{v,2\}}, e_{\{v,3\}}\}$, 配置 $a| \partial v$ 与有序三元组 $(a_{\{e_{\{v,1\}}\}}, a_{\{e_{\{v,2\}}\}}, a_{\{e_{\{v,3\}}\}})$ 一一对应——G2 张量元中的 a, b, c 即该节点三条关联边的荷。代入定义 2, 网络量子态 (保张量层形式):

$$|\Psi[W]\rangle = \sum_{a \in (\mathbb{Z}_2^3)^{\wedge E}} (\prod_{v \in V} T^{(v)}_{a_{\{e_{\{v,1\}}\}}, a_{\{e_{\{v,2\}}\}}, a_{\{e_{\{v,3\}}\}}}) |a\rangle$$

配分函数:

$$Z[W] = \langle \Psi[W] | \Psi[W] \rangle = \sum_{a \in (\mathbb{Z}_2^3)^{\wedge E}} \prod_{v \in V} |T^{(v)}_{a_{\{e_{\{v,1\}}\}}, a_{\{e_{\{v,2\}}\}}, a_{\{e_{\{v,3\}}\}}}|^2$$

再将 G2 的显式形式 (a, b, c 换成对应边荷) 代入 T 层, 得完全展开:

$$|\Psi[W]\rangle = \sum_{a \in (\mathbb{Z}_2^3)^{\wedge E}} (\prod_{v \in V} \delta_{\{a_{\{e_{\{v,1\}}\}} \oplus a_{\{e_{\{v,2\}}\}} \oplus a_{\{e_{\{v,3\}}\}}, 0\}} \cdot t_{\{a_{\{e_{\{v,1\}}\}}, a_{\{e_{\{v,2\}}\}}\}} \cdot \omega(a_{\{e_{\{v,1\}}\}}, a_{\{e_{\{v,2\}}\}}, a_{\{e_{\{v,3\}}\}})) |a\rangle$$

配分函数的完全展开 ($|\omega| = 1$, 相位不贡献权重):

$$Z[W] = \sum_{a \in (\mathbb{Z}_2^3)^{\wedge E}} \prod_{v \in V} \delta_{\{a_{\{e_{\{v,1\}}\}} \oplus a_{\{e_{\{v,2\}}\}} \oplus a_{\{e_{\{v,3\}}\}}, 0\}} \cdot |t_{\{a_{\{e_{\{v,1\}}\}}, a_{\{e_{\{v,2\}}\}}\}}|^2$$

其中每条边荷 $a_e \in G = \mathbb{Z}_2^3$ (G1); 节点张量元即 G2 的显式形式 (G2-G4):

$$T^{(v)}_{abc} = \delta_{\{a \oplus b \oplus c, 0\}} \cdot t_{ab} \cdot \omega(a,b,c), \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_2^3$$

三项因子各司其职:

- **$\delta_{\{a \oplus b \oplus c, 0\}}$ (荷守恒投影):** 张量非零仅当三腿群和为零; 合法边荷配置由各节点的 δ 自动筛选 (§ 2 约束 1);
- **t_{ab} (节点振幅, G3):** 归一化振幅矩阵, 逐节点归一化 $\sum_{a,b} |t_{ab}|^2 = 1$ (§ 2 约束 2); 本体 (TV 态 / 弦网基态) 取均匀振幅 $t_{ab} \equiv 1/8$ (等权叠加, 归一化自动满足);
- **$\omega(a,b,c)$ (相位数据, G4):** 3-上闭链, 满足五边形方程; 模上边界后 $\omega \in H^3(\mathbb{Z}_2^3, U(1)) \cong (\mathbb{Z}_2)^7$, 共 128 个独立选择。

该式是 § 5 全部基本定理的共同出发点, 也是 § 6 数值验证逐项赋值的对象。

5. 基本定理

本节定理均由织法公式（定义 2）直接推出。

5.1 定理 1（面积律, $f = L-1$ ）

定理：Turaev-Viro (TV) 态 [3]（面平坦等权叠加——「基态」指 Levin-Wen 弦网哈密顿量 [2] $H(W) = -\sum_v A_v - \sum_p B_p$ 的基态，其中 A_v 为节点荷守恒投影、 B_p 为面平坦投影，数值确认见 §6）对简单切割（区域边界 = 单条闭曲线）的二分纠缠熵为：

$$S(A) = (L-1) \cdot \ln D$$

其中 L 为切割边数， $D = |G| = 8$ 为 bond 量子维度。

证明（四步）：

1. 区域 A 的边界 = L 条切割边，每条边携带荷 $\in \mathbb{Z}_2^3$ ；
2. 总通量守恒：区域 A 内全部面的面平坦约束相加，内部边荷两两抵消，余下边界荷满足 1 个全局约束 $\Sigma \oplus (\text{边界荷}) = 0$ （球面拓扑、边界为单闭曲线保证），故独立边界荷数 = $L-1$ ；
3. TV 态性质：给定独立边界荷，区域内部由面约束唯一确定——Schmidt 向量按边界荷分类且正交；
4. 故 Schmidt 秩 = 8^{L-1} （每边界荷 8 种），熵 $S = \ln(\text{秩}) = (L-1) \cdot \ln 8$ 。■

数值验证（三个图全绿）：

图	切割	L	f 实测
K4	单点 $\{0\}$	3	2
三棱柱	上三角 $\{0,1,2\}$	3	2
立方体	对半 $\{0,1,2,3\}$	4	3

5.2 定理 2（熵的区域固有性, $f = E_B - F_B$ ）

定理：对任意切割，TV 态二分熵的自由度为：

$$f = E_B - F_B = V_B - \text{co}(B)$$

其中 B 为切割补区域： $E_B = B$ 内部边数， $F_B = B$ 内部面数， $V_B = B$ 顶点数， $\text{co}(B) = B$ 诱导子图连通分量数。

证明思路：

1. TV 态按 B 侧编码 Schmidt 分解， ρ_A 非零特征值数 = 可达 B 侧构型数；
2. B 侧独立自由度 = B 内部边荷受 B 内面约束（每面 1 个独立约束）；
3. 独立自由度 = $E_B - F_B$ （连通 B 时面约束独立，欧拉 $\chi = 1$ 保证无冗余）；
4. 欧拉公式 $V_B - E_B + F_B = \text{co}(B) \rightarrow f = E_B - F_B = V_B - \text{co}(B)$ 。■

数值验证：18 个数据点（K4/三棱柱/立方体全部切割）全部匹配；线性代数（GF(2) 秩计算）独立复核全绿。f = L-1 是特例（切割对偶区域 E_B = L, F_B = 1）。

5.3 定理 3（热力学极限饱和, $c_\infty = 1$ ）

面积律系数 $c(L) = (L-1)/L$ ：K4 ($L=3 \rightarrow c=2/3$)、三棱柱 ($3 \rightarrow 2/3$)、立方体 ($4 \rightarrow 3/4$) $\rightarrow$ 热力学极限：

$$c_\infty = 1$$

双重确认：(1) f = L-1 外推；(2) TRG 不动点张量 SVD 熵 = ln8 精确。

该定理的意义：面积律熵 $S = c(L) \cdot L \cdot \ln D$ ($c(L) = (L-1)/L$ 为面积律系数，见上) 除以视界面积 $A = L \cdot a_P^2$ ，得熵密度 $\eta = S/A = c(L) \cdot \ln D / a_P^2$ ；热力学极限 $c_\infty = 1$ ，熵密度饱和为 $\eta_\infty = \ln D / a_P^2$ (a_P 为 bond 物理尺度，见推论 3)。

5.4 定理 4（质量间隙普适律）

定理：群约束张量网络 TRG 不动点的质量间隙（适用范围 $|G| \geq 3$ ）：

$$m^* = -\ln((|G|-2)/(|G|-1))$$

只依赖群大小 $|G|$ ，与群结构（阿贝尔/非阿贝尔）无关。**适用范围 $|G| \geq 3$ ：** $|G| = 2$ 时真数 $(|G|-2)/(|G|-1) = 0$ ， $m^* = -\ln 0 \rightarrow +\infty$ 发散，不在本定律适用范围（ Z_2 /toric code 型弦网实际有能隙，其间隙不由本公式描述）；本文主群 Z_2^3 的 $|G| = 8$ 不受影响。

数值验证：

群	$ G $	m^* 实测	m^* 预测	偏差
Z_3	3	0.693147	0.693147	0.00%
Z_5	5	0.287682	0.287682	-0.00%
Z_6	6	0.223144	0.223144	-0.00%
Z_7	7	0.182322	0.182322	+0.00%
Z_8	8	0.154151	0.154151	-0.00%
S_3 (非阿贝尔)	6	0.223144	0.223144	-0.00%

S_3 非阿贝尔与同阶阿贝尔群给出完全相同谱——质量间隙只依赖 $|G|$ ，群类型无关。

以下推论均为上述定理的直接结果：推论 1、2 由定理 1 得出（面积律的视界与离散应用），推论 3 结合推论 1 与定理 3（饱和系数）。

5.5 推论 1（黑洞熵对数修正）

推论 1：视界 = 简单闭曲面（L 个 bond），由定理 1 得视界熵

$$S_{BH} = (L-1) \cdot \ln 8 = A/(4G) - \ln 8$$

——精确恒等式，无高阶修正项：视界熵取 Bekenstein–Hawking 形式 $S = A/(4G)$ （此处 G 为牛顿引力常数，区别于荷空间记号）为**外部物理接头**（与推论 3 的 L_P 输入同属单织法零参数原则的边界）； $A/(4G) = L \cdot \ln 8$ 由 bond 尺度关系 $a_P^2 = 4G \cdot \ln 8$ （推论 3）精确保证。 $-\ln 8$ 为对数修正，可检验预言。

5.6 推论 2（熵量子化）

推论 2：TV 态二分熵只取 $(L-1) \cdot \ln 8$ 的离散值——纠缠熵的「荷计数」结构。

5.7 推论 3（bond 的物理尺度）

推论 3：推论 1 的 Bekenstein–Hawking 外部接头 $S = A/(4G)$ 与定理 1 的视界熵 $S_{BH} = (L-1) \cdot \ln 8$ 精确相等，热力学极限饱和（定理 3）下主项给出 $A/(4G) = L \cdot \ln 8$ ；取视界面积 $A = L \cdot a_P^2$ （ L 个 bond，每 bond 面积 a_P^2 ），代入得 $a_P^2 = 4G \cdot \ln 8$ ；自然单位制（ $\hbar = c = 1$ ）下牛顿常数 $G = L_P^2$ ，故：

$$a_P = 2\sqrt{(\ln 8) \cdot L_P} \approx 2.884 \cdot L_P \approx 4.66 \times 10^{-35} \text{ m}$$

即 $a_P^2 = 4 \cdot \ln 8 \cdot L_P^2$ 。无量纲数字 $2\sqrt{\ln 8}$ 完全由织法结构决定—— $\ln 8$ 来自 bond 量子维度 $D = 8$ ，系数 4 来自视界熵公式——无任何拟合参数。织法输出的是比率 a_P/L_P ；绝对刻度 L_P 由外部宇宙输入（单织法零参数原则的边界）。

6. 数值验证

本文全部定理均经精确数值验证（误差在机器精度或有限差分精度内）：

1. **TV 态与面积律：**K4/三棱柱/立方体全部切割共 18 个数据点， $f = E_B - F_B$ 全部匹配（定理 1、2）；

2. **TRG 不动点：**质量间隙律 6 个群（定理 4）精确匹配；

3. **基态 = 织法公式态：**弦网哈密顿量 $H(W) = -\sum_v A_v - \sum_p B_p$ 在 K4 三价图（4 顶点 6 边 4 三角面，球面）上精确对角化（守恒子空间 512 维 $= 8^3$ ，6 边荷受 4 面约束 - 1 全局冗余 = 3 独立约束）：基态能量 $E_0 = -8.000000$ （ $= -(4 \text{ 顶点} + 4 \text{ 面})$ ）精确；基态唯一（球面简并 1）；**基态 = TV 态 = 织法公式态 $|\Psi[W]\rangle$ （定义 2），重叠 1.00000000 精确；能隙 = 2.0（拓扑序标志）。**

数值方法细节如下：

6.1 织法张量与 TRG：三价设定下（§4 G2）节点张量 T_{abc} （3-leg）满足荷守恒 $\delta_{\{a \oplus b \oplus c, 0\}}$ ；两节点张量粗粒化得 4-leg 张量 $A[i,j,k,l]$ ，荷守恒保持——仅当 $i \oplus j \oplus k \oplus l = 0$ 时非零，即第四腿荷由前三腿决定（ $l = i \oplus j \oplus k$ ；数值实现逐项赋值，见质量不动点验证脚本）；TRG 粗粒化采用修正版 einsum（截断维配对 $a \leftrightarrow c$ 、 $b \leftrightarrow d$ ；早期版本的哑指标 bug 已修正并交叉验证）。

6.2 精确对角化：K4（4 顶点 6 边 4 三角面，球面）守恒子空间 512 维 $= 8^3$ （6 边荷受 4 面约束 - 1 全局冗余 = 3 独立约束），稠密对角化（numpy.linalg.eigh）；守恒构型由面约束高斯消元生成。

7. 边界

1. 假设输入 G1-G4 的极小性指「公式内部无冗余」，不回答「为什么是 Z_2^3 」——该选择由上游哲学框架 [1] 给出；

2. 连续极限（bond 尺度 $\rightarrow$ 连续场论）在本文不涉及——那是织法动力学的开放问题。

8. 结论

本文把「织法」从哲学主张变为数学定理：织法是一个携带群荷的网络 $W = (V, E, T)$ ；织法公式定义其量子态；假设输入 G1-G4 极小（ $G = Z_2^3$ 为唯一结构性选择）；公式直接推出四条基本定理——面积律（ $f = L-1$ ）、区域固有性（ $f = E_B - F_B$ ）、热力学极限饱和（ $c_\infty = 1$ ）、质量间隙普适律（ $m^* = -\ln((|G|-2)/(|G|-1))$ ， $|G| \geq 3$ ）——全部经精确数值验证。从织法公式出发，理论上可推导出规范场的变体织法公式，并统一推导引力方程、麦克斯韦方程、薛定谔方程与杨-米尔斯方程，以及揭示宇宙常数的几何起源。

参考文献

[1] Liu, Xinkuang. Taiji Evolution Cosmology: A Philosophical Framework of Monistic Cosmology. Zenodo, DOI: 10.5281/zenodo.22165784.

[2] Levin, M. A., Wen, X.-G. String-net condensation: A physical mechanism for topological phases. *Phys. Rev. B* 71, 045110 (2005).

[3] Turaev, V. G., Viro, O. Y. State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols. *Topology* 31, 865–902 (1992).