

规范力的织法起源

The Weaving Origin of the Gauge Forces

刘心旷，姬雅

摘要

本文从织法公式 [1] 出发：在唯一的结构性输入——三比特结构 Z_2^3 ——下，展示标准模型中三个规范力的结构如何从同一网络涌现，并在同一代数对象中统一。核心结果是：三个规范力对应**同一个 ℓ 维空间 C^ℓ 上的两类对称**（ $\ell = 3$ 时为 C^3 ）——连续的 $U(\ell) = U(1) \times SU(\ell)$ 与离散的 $S_\ell \rightarrow 2D_\ell \subset SU(2)$ 。由此得到规范玻色子计数 $\ell(\ell + 1)$ （ $G = Z_2^3$ 时 $1 + 8 + 3 = 12$ ），与标准模型一致。我们进一步给出：**色数 $b_P = N_c = \ell \equiv \log_2|G|$** （ $G = Z_2^3$ 时为 3）的代数必然性、电荷量子化 $Q = (\text{比特和}) / \ell$ （时为 $1/3$ ）的外代数来源、 $U(1)$ 与 $SU(3)$ 的同源性（同为 $u(\ell)$ 的分解），以及 $SU(3)$ 禁闭的代数证明。本文进一步给出从织法作用量到 **Yang-Mills 方程** 的推导：以自然格距 a_P 为格距，plaquette 的连续极限给出 $(1/4) \int d^4x (F^{\wedge i}_{\mu\nu})^2$ 与运动方程 $D_\mu F^{\wedge \mu\nu} = 0$ （阿贝尔情形即麦克斯韦方程）。本文的边界是明确的：所导出的是规范**结构**（群、表示、模式计数、方程、禁闭），而规范**强度**（耦合常数）不在本文范围，列为开放。

关键词：织法公式； Z_2^3 ；规范力；统一；弦网凝聚；禁闭

1. 引言

1.1 问题

标准模型以 $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ 描述电磁、弱、强三种规范相互作用。这一结构的**起源**在标准模型内部是空白：群是给定的、表示是给定的、三个耦合常数是自由参数。「为什么是这三个群？」「为什么是 12 个规范玻色子？」「为什么电荷量子化？」——这些问题在标准模型中没有答案。

一个自然的思路是：规范力不是基本输入，而是**某种离散结构的集体行为**。这一思路的现代形式是**弦网凝聚**：物质与规范场都是纠缠网络的长程行为，规范结构从网络的自治性中涌现。本文从织法公式（[1] 定义 2）出发，在**最小输入**下构造：唯一的结构性输入只是三**比特结构 Z_2^3** ——三个二进制位。本文不引入任何连续的群、表示或耦合作为输入；连续结构必须从织法公式中**长出来**。

1.2 本文结构

§ 2 给出织法公式与四项输入（ G_1 - G_4 ）。§ 3、§ 4、§ 5 分别导出 $U(1)$ 、 $SU(2)$ 、 $SU(3)$ 的规范结构；§ 6 给出三者的统一（同一 C^ℓ 上的两类对称）；§ 7 给出规范场的变体织法公式与 Yang-Mills 方程；§ 8 讨论边界与开放问题；§ 9 总结。

1.3 定位

本文属于弦网凝聚的思路 [2][7]。更广地说，它承接三个已有的洞见：

- **空间本身具有物理性质**（Einstein 1920 [5]）——在本文中，空间即带荷的网络 $W = (V,E,T)$ ；
- **真空是一种介质**——在本文中，介质即网络的相位自由度；光（相位的振荡）之所以能传播，正因为真空处处保有这一自由度；
- **规范场是网络的涌现**（Wen [2]）——在本文中，规范场即网络的相位读数。

与这些工作相比，本文的特点是把网络压到**最小输入**（三比特 Z_2^3 ），并从中**导出**若干具体的结构关系（色数 $N_c = \ell$ 、荷量子化 $1/\ell$ 、玻色子计数 $\ell(\ell+1)$ ）； c 与 G 的起源见另一工作。

2. 织法公式与输入

2.1 织法与织法公式

本文的输入是织法公式，其定义与基本定理见 [1]。简言之：

织法是一个带荷的网络 $W = (V, E, T)$ ： V 为节点， E 为边， 每条边携带一个荷 $a_e \in G$ （ G 为有限群）； 每节点带张量 $T_v : G^{\partial v} \rightarrow \mathbb{C}$ （腿与关联边一一对应）， 满足荷守恒（ $T_v \neq 0$ 仅当 $\oplus_{e \in \partial v} a_e = 0$ ）与归一化。

织法公式定义该网络的量子态：

$$|\Psi[W]\rangle = \sum_{\{a \in G^E\}} \left(\prod_{v \in V} T_v(a|_{\partial v}) \right) |a\rangle \quad [1]$$

(2.1)

即遍及所有边荷构型的叠加，振幅为节点张量之积。

2.2 假设输入 G1-G4

按 [1]，具体化需要四项输入：

项	内容
G1	荷空间 $G = Z_2^3$ （八元素有限阿贝尔群）——唯一的结构性假设
G2	价数 $n = 3$ （三价节点；注意：本文的比特数记 ℓ ，与 [1] 的价数 n 区分），节点张量 $T_v^{(a,b,c)} = \delta_{\{a \oplus b \oplus c, 0\}} \cdot t_{ab} \cdot \omega(a,b,c)$
G3	节点振幅 t_{ab} （本体取等权 $t_{ab} \equiv 1/ G $ ， Z_2^3 下即 $1/8$ ）
G4	相位 ω ——3-上闭链，满足五边形方程； $\omega \in H^3(Z_2^3, U(1)) \cong (Z_2)^7$ ，共 128 种选择（ $\ell = 3$ 的具体值；一般形式见 [1]）

网络态 $|\Psi[W]\rangle$ 即弦网基态 (Turaev-Viro 态), 是弦网哈密顿量 $H(W) = -\sum_v A_v - \sum_p B_p$ 的基态 [1]。本文的目的是: 从这一输入出发, 导出三个规范力的结构。

2.3 从 Z_2^3 到 $\wedge C^\ell$

Z_2^3 的八个元素与外代数 ($\wedge$ 为外积, C 为复数域; $\wedge C^\ell$ 为 C^ℓ 上的外代数, $\wedge^k$ 为 k 阶外幂)

$$\wedge C^\ell = \bigoplus_{k=0}^{\ell} \wedge^k C^\ell, \quad \text{维数 } 2^\ell = |G|. \quad (2.2)$$

作为集合一一对应 (群结构与外代数结构是两套结构, 这里用到的是后者的**分层**)。代入 $G = Z_2^3$ ($\ell = 3$):

$$\wedge C^3 = \wedge^0 \oplus \wedge^1 \oplus \wedge^2 \oplus \wedge^3, \quad \text{维数 } 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = |Z_2^3|. \quad (2.3)$$

把比特的「比特和」读作外代数的**阶** $d = 0, 1, \dots, \ell$, 把比特 1 的**位置**读作层内位置。这一重写不是装饰——后文可见, 荷 (§3) 与禁闭 (§5.5) 都由**层结构**读出。(层的奇偶还给出自旋-统计信息, 属另一工作。)

2.4 三价网络与 Z_2^3 结构

一个顶点连三条 bond (三价节点, 价数 $n = 3$); 每条 bond 携带 $\ell = 3$ 个比特, 每个比特取值 0/1, 共 $2^3 = 8$ 种配置——即 Z_2^3 结构。(三价性与比特数是两个不同的「3」: 前者是节点的价数, 后者是 bond 的比特数。)

2.5 为什么这是最小输入

三个二值自由度是给出「非平凡置换结构」的最小配置: 两个二值自由度无法容纳三重结构与双重覆盖; 三个二值自由度给出 S_3 (6 阶, 含 3-循环与对换) 与三位的全部组合, 这恰好是同时产生 $U(1)$ 、 $SU(2)$ 、 $SU(3)$ 的充分条件 (后文逐一展示)。

3. $U(1)$ 的涌现

3.1 荷谱

每条 bond 携带**边荷** $a_e \in G$ (§2.1) ——一个群元素; 而**荷值** (本文记 Q) 是它的一个读数, 由比特和 (汉明重量 wt) 给出:

$$Q(a_e) = wt(a_e) / \ell; \quad \text{代入 } G = Z_2^3 \quad (\ell = 3), \quad \text{得 } Q = (\text{比特和}) / 3. \quad (3.1)$$

由 $\wedge C^3$ 的层结构, 荷的可能取值为 k/ℓ ($k = 0, 1, \dots, \ell$); 代入 $\ell = 3$, 得 **0、1/3、2/3、1**。

网络的组合对象 (弦端、闭环) 由此获得量子化的荷谱。以网络的 28 个非真空对象为例 ($\ell = 3$):

$$\text{12 个对象荷 } 1/3, \text{ 12 个对象荷 } 2/3, \text{ 4 个对象荷 } 1 \text{ (共 28 个)}. \quad (3.2)$$

(其余对象不在本文范围；这 28 个对象的物质身份——与标准模型费米子的对应——属另一工作，见 § 8.2。)

Q 的物理意义。 a_e 是网络自身的状态 (§ 2.1)； Q 是这个状态与相位场耦合的荷——即规范理论中的**电荷**。规范场的存在要求一个不随规范变换改变的守恒量：若所有对象的 $Q = 0$ ，则 $U(1)$ 的相位旋转不产生任何物理效应；正因为存在非零 Q ，该旋转才有物理后果。因此 Q 是 $U(1)$ 规范场得以存在的前提——场的源（高斯定律）、守恒流（连续性方程）与耦合强度都由 Q 给出。 Q 取值的离散性 (§ 3.2) 是层结构的运算结果而非动力学选择——这正是电荷量子化的来源。

3.2 「/3」的代数来源

荷公式中的「除以 ℓ 」此前是假设。在织法结构中它可以被读出：量子化单位是外代数最高阶的倒数，而外代数的最高阶 ($\wedge^\ell C^\ell$ 的阶) 即 bond 的比特数 ℓ ——也即色数 (§ 5.2)。因此

$$\text{荷的量子化单位} = 1/\ell ; \text{ 代入 } \ell = 3, \text{ 得 } 1/3。 \quad (3.3)$$

三处出现的同一个数（外代数阶、荷单位的分母、色数）在一般群下都是 $\ell = \log_2 |G|$ ；在 Z_2^3 下为 3。这一点把「/3」从假设降级为代数结果。

3.3 弦附着机制

$D(G)$ 的全部 $|G|^2$ 个对象（群元 $\times$ 特征标； $G = Z_2^3$ 时 64 个）都自共轭：每个对象与其自身的镜像等价。荷并非对象的固有属性，而是**附着**的产物：每吸附一条弦，对象在外代数中的层数增加 1，荷相应地增加 $1/\ell$

$$\Delta Q = +1/\ell \text{ (每弦)} ; \text{ 代入 } \ell = 3, \text{ 得 } \Delta Q = +1/3。 \quad (3.4)$$

由此，闭合链与外弦的荷谱自治地重现（三重自治：外代数阶、荷单位分母与色数同为 ℓ ）。

3.4 场的涌现

把荷放到闭合链上，要求每个顶点的荷守恒（Gauss 约束）。守恒条件只允许**相位**作为对偶变量：荷是离散的层数，相位是其共轭。由此得到紧致 $U(1)$ 理论的哈密顿量；在低能（弱场）极限下，转子链的激发谱无隙（gapless），长波极限即麦克斯韦方程。

这里不需要预先放入 $U(1)$ ：**相位的必要性来自荷守恒**，而麦克斯韦方程是相位自由度的长波行为。

3.5 模式计数

$U(1)$ 的 gapless 模式数为

$$1 \text{ (光子)}。 \quad (3.5)$$

3.6 完整方程组与荷守恒

(一) 荷守恒 → 连续性方程

节点张量的荷守恒（§ 2.1）在离散层就是「每个节点的荷进出平衡」。（此处把网络的一个方向取作时间——在格点规范理论中，时间同样是格点的一维。）设节点荷密度 ρ 、边流 j ，离散守恒为

$$\partial_t \rho_v = - \sum_{e \in \partial v} j_e \tag{3.6}$$

取连续极限（格子尺度 $a_P \rightarrow 0$ ；中间差一个由 a_P 决定的量纲因子，可吸收进 j 的定义）：

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot j = 0 \quad (\text{连续性方程}) \tag{3.7}$$

即：连续性方程不是额外假设，而是织法的节点荷守恒在长波极限下的形式。

(二) 高斯定律

同一条守恒律的静态部分即 Gauss 约束：顶点荷守恒给出

$$\nabla \cdot E = \rho \quad (\text{高斯定律}) \tag{3.8}$$

其中 E 为相位梯度的对偶场（§ 3.4）。即：Gauss 约束与高斯定律是同一条织法结构的两种说法。

(三) 完整麦克斯韦方程组

转子链的连续极限给出相位场 $\theta(x, t)$ 与场强

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (A_\mu \text{ 为链接相位 } \theta_e \text{ 的连续极限: } \theta_e \rightarrow a_P A_\mu) \tag{3.9}$$

由此四个方程各有结构来源：

方程	形式	来源
高斯定律	$\nabla \cdot E = \rho$	Gauss 约束（荷守恒，静态）—— 约束
磁场无源	$\nabla \cdot B = 0$	$B = \nabla \times A$ 的定义—— 结构恒等
法拉第定律	$\nabla \times E = - \partial B / \partial t$	$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ 的定义—— 结构恒等
安培-麦克斯韦	$\nabla \times B = \partial E / \partial t + j$	作用量变分（运动方程）—— 动力学

即：四式中**两式是定义恒等**（磁场无源、法拉第——来自 F 的定义），**一式是约束**（高斯——来自荷守恒），**一式是动力学**（安培-麦克斯韦——来自变分）。这与标准表述完全一致，且每一式在织法中都有明确来源。

4. SU(2) 的涌现

4.1 三位与双重态

ℓ 个比特位的置换群为 S_ℓ ($\ell = 3$ 时 S_3 , 6 阶)。 S_ℓ 的不可约表示包含一个 $(\ell-1)$ 维表示:

$$\ell = (\ell - 1) \oplus 1 \text{ (自然表示)}; \text{ 代入 } \ell = 3, \text{ 得 } 3 = 2 \oplus 1. \quad (4.1)$$

ℓ 维的「位置」空间因此在置换下分解为一个 $(\ell-1)$ 维多重态与一个单态。这正是 $SU(2)$ 所需的二维结构 ($\ell = 3$ 时): 弱相互作用的多重态不是额外输入, 而是**位交换的不可约表示**。

4.2 $2D_3 \subset SU(2)$ 与自旋结构

S_3 的二维表示实现为二面体群 $D_3 \subset O(2)$, 其双覆盖 $2D_3$ (12 阶) 嵌入 $SU(2)$ 。关键在核:

$$2D_3 \text{ 的核 } \{\pm I\} \leftrightarrow \text{拓扑自旋 } -1 \text{ (} \ell = 3 \text{)}。 \quad (4.2)$$

即, 置换结构的双覆盖带来的 $\mathbb{Z}_2$ 核, 与网络对象「拓扑自旋 -1 」的费米子性同源 (§ 5 与 § 7 使用同一事实)。这意味着弱相互作用的自旋结构不是后来附加的, 而是位交换群的自然双覆盖。(双覆盖的 $\mathbb{Z}_2$ 核对任意 ℓ 都存在; $\ell = 3$ 时它给出 $SU(2)$ 的自旋 $1/2$ 。)

4.3 破缺与质量矩阵

网络基态上方存在一个「位定向」——某个比特位方向被环境(或网络的边界条件)选出, 置换对称性从 S_ℓ 破缺到 $S_{\{\ell-1\}}$:

$$S_\ell \rightarrow S_{\{\ell-1\}}; \text{ 代入 } \ell = 3, \text{ 得 } S_3 \rightarrow S_2. \quad (4.3)$$

破缺后, 自然表示 (ℓ 维) 限制到 $S_{\{\ell-1\}}$ 后完全分解为一维分量 ($\ell = 3$ 时 $3 = 1 \oplus 1 \oplus 1'$, 即 S_2 的两个一维表示按重数组合), 而质量矩阵为

$$\text{diag}(0, m^2, \dots, m^2) \text{ (1 个零模 + } (\ell-1) \text{ 个有质量模)}; \text{ 代入 } \ell = 3, \text{ 得 } \text{diag}(0, m^2, m^2)。 \quad (4.4)$$

零模自动出现——它对应光子 (§ 6.3 的计数)。这一质量矩阵不是手写的: 它是位定向后置换表示的标准化结果。

(说明: 此处给出的是位定向破缺后的**结构谱型**——1 个零模与 $(\ell-1)$ 个有质量模; 电弱混合 (W^3 与 B 混合给出 Z) 不在本文范围, 故与标准电弱谱 ($\gamma + W^\pm + Z$) 的逐步对应留待电弱工作。)

4.4 连续化

把位定向的离散变量放到链上并做连续极限, 得到 ℓ 个 **gapless 模式** ($\ell = 3$):

$$W^1, W^2, W^3 \quad (4.5)$$

非微扰计算(截断基)显示三者近简并, 其色散在基态处取 $k = 0$ ——与规范玻色子的谱形一致。

(这里的 ℓ 个模式是 $SU(2)$ **本身的三重态** (对称相); 破缺后的质量谱见 § 4.3。两处的差别正对应「对称相」与「破缺相」两种情形。)

5. SU(3) 的涌现

5.1 bond 对与 $1 \oplus 8$

取两条相邻 bond 的配对 (bond 对)。每对的结构给出

$$\ell \otimes \ell = 1 \oplus (\ell^2 - 1); \text{ 代入 } \ell = 3, \text{ 得 } 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8. \quad (5.1)$$

即 $\ell^2 - 1$ 个非单态通道 ($\ell = 3$ 时 8 个)。这些通道携带 $\ell^2 - 1$ 个参数, 构成非阿贝尔 plaquette 变量。plaquette 的闭合相位取值于 ℓ 阶循环群 Z_ℓ ($\ell = 3$ 时 Z_3 ; 来自「 ℓ 个色」的循环结构), 给出局域通量——色结构的格点骨架由此建立。

5.2 色数与胶子数的代数必然性

一个 SU(N) 规范理论有 $N^2 - 1$ 个胶子。织法结构给出的色数是 bond 的比特数:

$$N_c = \ell \equiv \log_2 |G|. \quad (5.2)$$

胶子数随之确定:

$$N_c^2 - 1 = \ell^2 - 1. \quad (5.3)$$

代入 $G = Z_2^3$ ($\ell = 3$), 得 $N_c = 3$ 、 $N_c^2 - 1 = 8$ 。

这里的论证不是「8 恰好等于 $3^2 - 1$ 」, 而是: bond 的外代数 $\wedge^1 C^\ell$ 的一阶层 $\wedge^1 C^\ell$ 给出 ℓ 个独立的「色」基 ($\ell = 3$ 时为 3 个), 因此色的表示空间维数为 ℓ , 规范群为 SU(ℓ) (胶子数 $\ell^2 - 1$)。换言之, **色数 ℓ 不是输入, 而是 bond 结构 (ℓ 个比特) 的代数结果**。注意: $\ell = 3$ 时 $2^\ell = \ell^2 - 1$ (bond 的态数恰等于胶子数) ——这是 $\ell = 3$ 的特征巧合, 两个数在一般 ℓ 下并不相等。标准模型中 $N_c = 3$ 是自由输入且无人解释; 这里它被导出。

记这个量子数为 b_P ——织法的**无量纲量子数** (色流饱和量子数): 它等于 bond 的比特数

$$b_P = N_c = \ell = \log_2 |G|; \text{ 代入 } G = Z_2^3 \text{ } (\ell = 3), \text{ 得 } b_P = N_c = 3. \quad (5.4)$$

在本文中 b_P 以**色数**的身份出现 (与长度量纲的读数 a_P 相对, b_P 是无量纲读数); 它与荷量子化单位 (§ 3.2) 出自同一处 (外代数阶), 并在质量比等其它读数中再次出现 (§ 8.1)。 b_P 的更深含义超出本文范围。

5.3 弱场展开与 gapless 模式

在弱场极限下展开 plaquette 的作用量, 得到

$$\text{Tr}(U \dagger U') = 3 - \frac{1}{4} |\Delta\theta|^2 + \cdots \quad (\ell = 3) \quad (5.5)$$

其二次型有

$$\ell^2 - 1 \text{ 个 gapless 模式 } (\ell = 3 \text{ 时 } 8 \text{ 个}) \quad (5.6)$$

——与胶子数一致。这与 § 5.2 的代数计数是**两条独立路径得到同一个 8**。

(注：二次型的系数随规范群而变；「gapless 模式数 = $\ell^2 - 1$ 」的结论不依赖该系数。)

5.4 非微扰谱

为检验弱场结论，我们构造有限维截断基 $\{1, 3, 3, 8\}$ (83 维)，并用 Haar 积分算符（不做任何手工 Clebsch–Gordan 系数）计算 plaquette 的低能谱。结果：双格点系统的第一、第二激发能近似相等，且在 $L = 3$ 链 (571,787 维) 中低能谱呈密集带 ($0.38 \rightarrow 0.06 \rightarrow 0.02$)，色散（动量分辨）给出基态 $k = 0$ ——与非阿贝尔规范场的低能行为一致。

5.5 禁闭

定理（单比特翻转分解）：设电荷分离的构型由单比特翻转连接，则任一这样的翻转唯一分解为「中性空间部分」与「冻结位型部分」两类不相交的操作，且端到端的交叉项为零。

由此，电荷分离的构型无法分解为自由弦端——**禁闭是该定理的直接结果**。

数值上，在 $SU(2)$ 链的两端放置 $j = 1/2$ 源，得到准线性的静态势 $V(R)$ （弦张力 $\sigma \approx 0.107$ ， $R = 4, 5$ 的 V/R 饱和于 $0.105\text{--}0.107$ ）——这与格点规范理论的禁闭判据 [3] 一致。扫描 $\sigma(g^2)$ 显示：弱耦合区的 σ 变号，给出禁闭–退禁闭相变的候选信号。

5.6 模式计数

$SU(3)$ 的模式数即 (5.3) 所给的胶子数；代入 $\ell = 3$ ，得 8。

6. 统一：同一 C^ℓ 的两类对称

6.1 连续分支： $U(\ell) = U(1) \times SU(\ell)$

$\wedge C^\ell$ 的**保分层、保内积的代数自同态**（保持外代数乘法、分层与 C^ℓ 上的内积）分别作用于层结构与层内结构：分层方向给出 $u(1)$ （单一相位），层内方向给出 $su(\ell)$ （行列式为 1 的酉变换）。因此

$$\text{自同态}(\wedge C^\ell) = \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{su}(\ell) \Rightarrow U(\ell) = U(1) \times SU(\ell); \text{ 代入 } \ell = 3, \text{ 得 } U(3) = U(1) \times SU(3). \quad (6.1)$$

这是一条代数事实，同时产生电磁与强相互作用： $U(1)$ 与 $SU(3)$ **同源** ($\ell = 3$)。

6.2 离散分支： $S_3 \rightarrow 2D_3 \subset SU(2)$

位交换结构（§ 4.2）给出 S_3 ，其双覆盖嵌入 $SU(2)$ ：

$$S_3 \rightarrow 2D_3 \subset SU(2) \quad (\ell = 3) \quad (6.2)$$

——弱相互作用的来源。与 § 6.1 的连续自同态不同，这里的结构是**离散**的（置换群），它通过双覆盖提供自旋 1/2 结构。

6.3 12 个规范玻色子

力	织法来源	模式数	模式数 ($\ell = 3$)
U(1)	$\wedge C^\ell$ 单态相位 (u(1))	1	1 (光子)
SU(2)	位交换 S_ℓ (2D $_\ell$ 双覆盖)	ℓ	3 ($W^1W^2W^3$)
SU(3)	$\wedge C^\ell$ 伴随 (su(ℓ))	$\ell^2 - 1$	8 (胶子)
合计	同一 C^ℓ	$\ell(\ell + 1)$	12

$\ell(\ell + 1)$ 在 $\ell = 3$ 时为 12，与标准模型的规范玻色子数一致。

6.4 与标准模型对照

三力的群、表示与模式数与标准模型一致 ($\ell = 3$) [4]；且两处标准模型中「无解释的输入」在此获得来源：色数 $N_c = \ell$ (§ 5.2) 与荷量子化单位 $1/\ell$ (§ 3.2)。耦合常数不在本文范围 (§ 8.2)。

7. 规范场的变体织法公式与 Yang–Mills 方程

7.1 变体织法公式

织法公式 ([1] 定义 2；公式见本文 (2.1)) 定义在有限群 G 上。**规范场的变体**是把边上的**离散荷** $a_e \in G$ 提升为**连续群元素** $U_e \in G_c$ (规范场取值的变量)：求和提升为 Haar 积分，节点张量仍作约束，并加入曲面 (plaquette) 权重 $w(U_p)$ ：

$$Z[W; G_c] = \int (\prod_{e \in E} dU_e) (\prod_{v \in V} T_v(U| \partial v)) (\prod_p w(U_p)) \tag{7.1}$$

其中 $U_p = \prod_{e \in \partial p} U_e$ 为 plaquette 的闭合乘积。这是一个**变体织法公式**：形式上与定义 2 平行 (节点约束 $\times$ 乘积 $\rightarrow$ 配分函数)，只是荷空间从有限群 G 换成连续群 G_c ，且局部权重中出现闭合环路。与有限群情形一样，合法构型由节点约束筛选、振幅为局部因子之积。

(说明：在**纯规范**情形，节点张量对连续群的求和归为常数 (归一化因子)，配分函数简化为 $Z[W; G_c] = \int \prod_e dU_e \cdot \prod_p w(U_p)$ ；节点约束在含物质时对应 Gauss 约束。)

7.2 变体的作用量

取格点作用量为 (与 [6], Eq. (8.3) 一致)

$$S = - (1/2g^2) \sum_{\{n,\mu\nu\}} \text{tr} [U_\mu(n) U_\nu(n+\mu) U_{-\mu}(n+\mu+\nu) U_{-\nu}(n+\nu)] + \text{h.c.} \tag{7.2}$$

其中 tr 为归一化迹 ($\text{tr } 1 = 1$)，方括号内即 plaquette 的闭合乘积 U_p 。形状由本地规则决定：规范不变 $\Rightarrow$ 只依赖闭合环路；最低阶只能依赖 plaquette。

7.3 连续极限

由 Baker–Hausdorff 公式 ([6], Eq. (8.7)):

$$U_p = \exp(i a_P^2 g F_{\mu\nu}) \quad (7.3)$$

再由迹展开 ([6], Eq. (8.9)):

$$\text{tr} \exp(i a_P^2 g F_{\mu\nu}) = \text{tr } 1 - \frac{1}{2} a_P^4 g^2 \text{tr } F_{\mu\nu}^2 + \dots \quad (7.4)$$

于是 (对每对 $\mu\nu$) $\text{tr } U_p + \text{h.c.} = 2(\text{tr } 1 - \frac{1}{2} a_P^4 g^2 \text{tr } F_{\mu\nu}^2)$ 。代入格点作用量并对 plaquette 求和 ($\sum_{\{n, \mu\nu\}} \rightarrow (1/a_P^4) \int d^4x$, $\sum_{\{\mu\nu\}}$ 为全求和), 常数项不贡献动力学, 得

$$S = (1/4) \int d^4x (F^{\mu\nu})^2 + O(a_P^2) \quad (7.5)$$

与 [6], Eq. (8.13a) 一致 (其中 $F^{\mu\nu}$ 为场强分量)。这里的关键是: **连续场 A_μ 不是输入**——它是变体织法公式中 U_e 在 $a_P \rightarrow 0$ (即长波, $\gg a_P$) 下的展开系数; $F_{\mu\nu}$ 的**非阿贝尔结构** ($[A_\mu, A_\nu]$ 项) 来自 plaquette 的非交换闭合乘积 (§ 5.1)。

7.4 三力的变体

力	变体织法公式的 G_c	U_e	模式数 (结构 $\rightarrow \ell = 3$)
U(1)	U(1)	$e^{i\theta_e}$ (紧致相位)	$1 \rightarrow 1$ (光子)
SU(2)	$2D_\ell \subset \text{SU}(2)$	$2D_\ell$ 元素	$\ell \rightarrow 3$ ($W^1 W^2 W^3$)
SU(3)	$\text{SU}(\ell)$	$\text{SU}(\ell)$ 元素 (bond 对 $1 \oplus (\ell^2 - 1)$)	$\ell^2 - 1 \rightarrow 8$ (胶子)

三者共用同一个变体织法公式 (§ 7.1), 只差 G_c 。

7.5 Yang–Mills 方程

对 S 变分, 得到运动方程

$$D_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad D_\mu = \partial_\mu + i g [A_\mu, \cdot]. \quad (7.6)$$

在阿贝尔 (U(1)) 情形 ($[A_\mu, A_\nu] = 0$):

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (7.7)$$

即**无源麦克斯韦方程** (含源形式见 § 3.6) ——与 § 3.4 的转子链长波极限一致 (两条独立路径)。

7.6 关于耦合常数

上述方程的形式与 g 的值无关。 g 的织法结构不在本文范围 (§ 8.2)：本文给出变体织法公式与群结构，不给出耦合强度。

8. 讨论与边界

8.1 跨层读数的一致性

本文的结果共用少数几个量子数——最值得注意的是 b_P (见 (5.4))。它以色数的身份出现在三力中，又同时是质量比公式 $m_p/m_e = 2b_P \cdot \pi^{(2b_P-1)}$ (另一工作) 中的量子数——同一个量子数一处两读。类似地，外代数最高阶、荷量子化单位的分母与色数三者同为 ℓ (§ 3.2/§ 5.2)。这种跨层复用是「最小输入」结构的特征。

8.2 本文不涉及 (明确列为开放)

1. **耦合强度**：本文给出「有哪些力、如何统一」，不给「力有多强」。耦合常数 (α 、 α_s 、 g) 的织法起源是独立问题，需要跑动/重整化层面的机制；
2. **二维连续化**：本文的连续化主要在 1+1 维链上完成；2+1 维的 plaquette 动力学 (胶子的完整色散) 留待后续；
3. **物质谱**：本文只导出网络产生的荷谱 (§ 3.1)；物质谱的完整讨论——28 个对象的身份、代结构 (本文只处理一个代)、中微子缺席、重子 (质子/中子) 的闭环结构——属独立工作；
4. **引力**： G 与 c 的织法起源是另一独立工作；本文只处理规范力。

8.3 与弦网凝聚的关系

本文可视为弦网凝聚纲领在「最小输入」方向上的具体化：弦网凝聚把物质与规范场统一为纠缠网络的长程行为；本文进一步把输入压缩到三比特，并给出具体数字 ($\ell = 3$ 下：色数 3、胶子数 8、12 个玻色子、荷单位 $1/3$ 、禁闭)——而这些数字背后的结构 ($N_c = \ell$ 、胶子数 $\ell^2 - 1$ 、玻色子数 $\ell(\ell + 1)$ 、荷单位 $1/\ell$) 对任意 ℓ 成立。

9. 结论

从织法公式 [1] 出发，以三比特结构 Z_2^3 为唯一的结构性输入，我们导出了三个规范力的结构并在同一 C^ℓ ($\ell = 3$ 时为 C^3) 上统一它们。关键结果： $\wedge C^\ell$ 的自同态给出 $U(\ell) = U(1) \times SU(\ell)$ ((6.1)； $U(1)$ 与 $SU(3)$ 同源)；位交换的双覆盖给出弱相互作用 ((4.2))；规范玻色子计数为 $\ell(\ell + 1)$ ，在 $\ell = 3$ 时为 12 (§ 6.3)；色数是 bond 比特数的代数结果 ((5.2))；荷量子化单位为 $1/\ell$ ((3.3))；禁闭由单比特翻转分解定理代数证明 (§ 5.5)；以 a_P 为自然格距，plaquette 的连续极限给出杨-米尔斯方程 ((7.6)；阿贝尔情形为麦克斯韦方程)。

本文的范围是规范结构；耦合强度、二代、二维动力学是明确的开放问题。

附录 A：数值方法

本文的数值结果可通过按以下描述设计计算机模拟实验复现：

1. **谱计算**：截断基 $\{1, 3, 3, 8\}$ (83 维)；Haar 积分算符构造 (无手工 CG)；
2. **链与动量**：周期链 + 平移投影, $k = 0$ 基态； $L = 3$ 链维数 571,787；
3. **禁闭**：SU(2) 链端点 $j = 1/2$ 源，静态势 $V(R)$ ，弦张力 $\sigma(g^2)$ 扫描；
4. **荷谱**： $\wedge C^\ell$ 层结构与比特 1 的位置枚举 ($\ell = 3$ 时 28 个对象)。

参考文献

[1] Liu Xinkuang, Ji Ya, Weaving Formula: Definitions and Theorems, Zenodo, DOI 10.5281/zenodo.22668050. [2] Xiao-Gang Wen, Quantum orders and symmetric spin liquids, Phys. Rev. B 65, 165113 (2002). DOI: 10.1103/PhysRevB.65.165113 [3] Kenneth G. Wilson, Confinement of quarks, Phys. Rev. D 10, 2445 (1974). DOI: 10.1103/PhysRevD.10.2445 [4] R. L. Workman et al. (Particle Data Group), Review of Particle Physics, PTEP 2022, 083C01 (2022). [5] A. Einstein, Äther und Relativitätstheorie (Springer, 1920). [6] J. B. Kogut, An introduction to lattice gauge theory and spin systems, Rev. Mod. Phys. 51, 659 (1979). DOI: 10.1103/RevModPhys.51.659 [7] Xiao-Gang Wen, Colloquium: Zoo of quantum-topological phases of matter, Rev. Mod. Phys. 89, 041004 (2017). DOI: 10.1103/RevModPhys.89.041004